CENTRE
DE
VANVES

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
CENTRE NATIONAL D'ENSEIGNEMENT A DISTANCE

407 A.2075.D.05
PROFESSEUR : M. Claude SERVIEN Devoir 5 - Série 9

COMPOSITION D'ANALYSE 1987

Durée : 6 heures

Notations

On note $x = (x_1, x_2)$ un point du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, avec le produit scalaire canonique $x.x' = x_1x_1' + x_2x_2'$, et la norme euclidienne $\|x\|$. On désigne par D (x, r), respectivement C (x, r), le disque fermé, respectivement le cercle, de centre x et de rayon $r \geq 0$; on écrira D $(0, 1)$ = D et C $(0, 1)$ = C pour abréger. On dit que C (x', r') *entoure* D (x, r) si D (x, r) est contenu dans l'intérieur de D (x', r'), c'est-à-dire si $\| x' - x \| < r' - r$. On note R_θ pour θ réel, la rotation d'angle θ autour de l'origine.

Toutes les fonctions considérées sont *à valeurs réelles*. On note supp f le *support* d'une fonction f, adhérence de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) \neq 0$. On note $dx = dx_1\, dx_2$ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$. Une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ est dite *radiale* si $f(R_\theta x) = f(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit L la droite affine de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x.u_\alpha = p$, avec $p, \alpha \in \mathbb{R}$, et $u_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha) \in$ C. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, on note f_L, ou $\hat{f}(p, \alpha)$, l'intégrale :

$$f_L = \hat{f}(p, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} f\left(pu_\alpha + tu_{\alpha+\frac{\pi}{2}}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(pu_\alpha + tu_{\alpha+\frac{\pi}{2}}\right) dt,$$

lorsque cela a un sens. De manière analogue, pour $\Gamma = C(a, r)$, on pose :

$$f_\Gamma = \int_0^{2\pi} f(a + ru_\theta)\, d\theta,$$

avec $a \in \mathbb{R}^2$, $r \geq 0$.

On rappelle la *formule de Green-Riemann :* si γ est une courbe C^1 par morceaux constituant le bord orienté d'un compact K du plan, et P_1, P_2 deux fonctions numériques de classe C^1 au voisinage de K, on a :

$$\iint_K \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2 = \int_\gamma P_1(x_1, x_2)\, dx_1 + P_2(x_1, x_2)\, dx_2.$$

On rappelle enfin le résultat suivant de *convergence dominée* :

Soit $(x, t) \longmapsto f(x, t)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$; si $|f(x, t)| \leq g(t)$ pour tous x, t, avec g intégrable sur $\mathbb{R}^p$, la fonction

$$x \longmapsto F(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x, t)\, dt$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$; si de plus f est de classe C^k en x, et si toutes ses dérivées partielles d'ordre k au plus en x sont continues sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et vérifient la majoration ci-dessus, alors F est C^k sur $\mathbb{R}^n$, et ses dérivées partielles se calculent par dérivation sous le signe somme.

But du problème : retrouver certaines propriétés d'une fonction f à partir des nombres f_L.

La partie I établit les résultats préliminaires, les parties II et III aboutissent à des théorèmes de support; ces trois parties utilisent du calcul différentiel et intégral dans le plan.

La partie IV, *indépendante des trois premières*, étudie la reconstruction approchée de f à partir d'un nombre fini des f_L, par des méthodes purement hilbertiennes.

I

Dans toute cette partie, f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, qui vérifie la propriété

(A) *pour tout entier* $n \geq 0$, *la fonction* $\| x \|^n |f(x)|$ *est bornée sur* $\mathbb{R}^2$.

Dans les questions 1° et 2° on suppose de plus $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

1° *a.* Établir une inégalité de la forme :

$$\left| f\left(pu_\alpha + tu_{\alpha + \frac{\pi}{2}}\right) \right| \leq \frac{C}{1 + p^2 + t^2}\,,$$

avec C indépendant de p, t, α, et montrer que $\widehat{f}$ est une fonction continue de (p, α) sur $\mathbb{R}^2$.

b. Si f et toutes ses dérivées partielles vérifient (A), montrer que $\widehat{f}$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

c. Sous l'hypothèse de *b*, établir les égalités :

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(p, \alpha) = \cos\alpha \,.\, \frac{\partial \widehat{f}}{\partial p}\,, \qquad \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_2}}(p, \alpha) = \sin\alpha \,.\, \frac{\partial \widehat{f}}{\partial p}$$

(on pourra calculer d'abord $\left(\cos\alpha \frac{\partial}{\partial p} - \sin\alpha \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(f\left(pu_\alpha + tu_{\alpha + \frac{\pi}{2}}\right)\right)$ au moyen de $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$).

2° On donne $R > 0$ et on suppose que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ vérifie (A) et

(B) *pour tout cercle* Γ *qui entoure* $D(0, R)$, *on a* $f_\Gamma = 0$.

a. Soient $R' > R$, et V l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^2$ tels que $\|v\| < R' - R$. En calculant $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x)\, dx$ en coordonnées polaires d'origine v, déduire de (B) que la fonction $g(v) = \iint_{D(v,\, R')} f(x)\, dx$ est constante pour $v \in V$ et que, pour $v \in V$, $i = 1, 2$, on a :

$$\iint_{D(0,\, R')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(v + x)\, dx = 0.$$

b. Montrer par la formule de Green-Riemann que $(h_i)_\Gamma = 0$ quand Γ est le cercle $C(0, R')$ et $h_i(x) = x_i . f(v + x)$, et que $(x_i f)_\Gamma = 0$ pour tout cercle Γ qui entoure $D(0, R)$.

c. En déduire, au moyen du théorème de Stone-Weierstrass, que $\operatorname{supp} f \subset D(0, R)$.

3° On suppose seulement que f est continue, et vérifie (A) et (B). On rappelle que, pour $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, positive, radiale, à support dans $D(0, \varepsilon)$, et telle que $\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1$.

a. Montrer que la fonction $f_\varepsilon(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(y)\, \varphi_\varepsilon(x - y)\, dy$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que f_ε vérifie (A) et (B), avec $R + \varepsilon$ au lieu de R.

c. En déduire que l'on a encore $\operatorname{supp} f \subset D(0, R)$.

II

Dans cette partie, f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, possédant la propriété (A) de I, et telle que :

(B') *pour toute droite affine* L *qui ne rencontre pas* D (0, R), *on a* $f_L = 0$.

4° On suppose de plus $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, et f *radiale*.

a. Montrer qu'il existe F, continûment dérivable sur $[0, +\infty[$, telle que :

$$f(x) = F(\|x\|^2) \qquad \text{et} \qquad \hat{f}(p, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(p^2 + t^2)\, dt \qquad \text{pour } (p, \alpha) \in \mathbb{R}^2.$$

b. Soit $G(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(q + t^2)\, dt$ pour $q > 0$. Vérifier que :

$$F(q) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dq} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(q + s^2)\, ds \right).$$

c. En déduire que $\operatorname{supp} f \subset D(0, R)$.

5° On ne suppose plus que f est C^∞. En s'inspirant de 3°, montrer que la conclusion de 4° *c* reste valable si f est continue, radiale, et vérifie (A), (B').

6° On ne suppose plus f radiale, mais seulement f continue et (A), (B'). Pour $a, x \in \mathbb{R}^2$, soit :

$$f^a(x) = \int_0^{2\pi} f(a + R_\theta x)\, d\theta.$$

a. Montrer que f^a est continue, radiale, vérifie (A) et (B') avec $R + \|a\|$ au lieu de R.

b. En utilisant 3° *c*, montrer que $\operatorname{supp} f \subset D(0, R)$.

III

Dans cette partie, on développe quelques applications de la question 6°. Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^2$.

7° *a.* Montrer que K est l'intersection de la famille des disques fermés qui le contiennent.

b. Soit $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$, vérifiant (A). Établir que $\operatorname{supp} g \subset K$ si et seulement si $g_L = 0$ pour toute droite affine L disjointe de K.

8° Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, solution de l'équation différentielle à coefficients constants :

$$\varphi^{(n)} + a_1 \varphi^{(n-1)} + \dots + a_n \varphi = 0$$

sur l'intervalle $I =]t_0, +\infty[$. On suppose $\varphi(t) = 0$ pour tout $t > t_1$, avec $t_1 \in I$. Montrer que φ est identiquement nulle sur I.

9° Soient $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, et $Pg = \sum_{j+k \leq m} a_{jk} \frac{\partial^{j+k} g}{\partial x_1^j \partial x_2^k}$, où les a_{jk} sont des constantes réelles, avec $a_{00} \neq 0$.

On suppose $\operatorname{supp} g$ compact et $\operatorname{supp} Pg \subset K$. En utilisant 1° *c* et 8°, montrer que $\operatorname{supp} g \subset K$.

10° Soient $h \in C^0(\mathbb{R}^2)$ et $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. On suppose que supp h est compact et que $\hat{h}(p, \alpha) = 0$ pour tout p réel et tout α tel que $|\alpha| \leqq \varepsilon$. Montrer que h est identiquement nulle (on pourra raisonner sur un losange dont un des angles est 2ε, et contenant supp h).

11° *a.* Construire une fonction $j \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $j(x_1, x_2) = z^{-2}$ si $z = x_1 + ix_2$, $|z| \geqq 1$, et montrer que $j_L = 0$ si la droite L est disjointe du disque unité D.

b. Montrer que $j_\Gamma = 0$ si le cercle Γ entoure D.

c. Que peut-on déduire de cet exemple?

IV

Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ son produit scalaire, $\|\ \|$ sa norme. On note $\bar{A}$, respectivement $A^\perp$, l'adhérence, respectivement l'orthogonal, d'une partie A de H.

On se donne k sous-espaces vectoriels fermés $N_1, \ldots, N_k$ de H, et on note $N_0 = N_1 \cap \ldots \cap N_k$. Soient I l'identité de H et, pour $f \in H$ *fixé*, P_j le projecteur orthogonal de H sur le sous-espace affine $f + N_j$ de H, avec $0 \leqq j \leqq k$; on pose $Q = P_k P_{k-1} \ldots P_2 P_1$.

On se propose de montrer d'abord que, pour tout $g \in H$,

(1) $$Q^n g \longrightarrow P_0 g \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

Dans les questions 12° à 16° on suppose de plus que $f = 0$; les P_j et Q sont alors des applications *linéaires* de H dans H.

12° *a.* Si P est un projecteur orthogonal de H sur un sous-espace vectoriel fermé N, montrer que l'égalité $\|Pg\| = \|g\|$ équivaut à $g \in N$.

b. En déduire que $\operatorname{Ker}(I - Q) = N_0$ (si $g \in \operatorname{Ker}(I - Q)$, on observera que $\|g\| \leqq \|P_1 g\| \ldots$).

c. En déduire que $\operatorname{Ker}(I - Q^*) = N_0$, où Q^* est l'opérateur adjoint de Q.

13° Soit $E = \operatorname{Im}(I - Q)$. Montrer que $H = \bar{E} \oplus N_0$, et qu'il suffit d'établir (1) pour $g \in E$.

14° Montrer par récurrence sur k que, pour toute suite (f_n) de la boule unité de H, la propriété « $\|Qf_n\| \longrightarrow 1$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ » implique que « $(I - Q)f_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ ».

15° *a.* Soit $g = (I - Q)h \in E$. Établir que $Q^n g \longrightarrow 0$; on pourra considérer $a = \lim_{n+\infty} \|Q^n h\|$ et, si $a > 0$, appliquer 14° à $f_n = Q^n h / \|Q^n h\|$.

b. En déduire (1).

16° Pour préciser la convergence (1), on suppose $k = 2$, et on note $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'angle de N_1 et N_2, défini par :

$$\cos\theta = \sup \frac{(g_1 \mid g_2)}{\|g_1\| \cdot \|g_2\|},$$

le sup étant pris pour $g_1 \in N_1 \cap N_0^\perp$, $g_2 \in N_2 \cap N_0^\perp$, non nuls.

a. Établir l'inégalité $\|Qg\| \leqq \cos\theta \cdot \|g\|$, pour $g \in N_0^\perp$.

b. En déduire que, pour tout $g \in H$ et tout entier $n \geqq 0$, on a :

(2) $$\|Q^n g - P_0 g\| \leqq \cos^n\theta \cdot \|g - P_0 g\|.$$

17° Montrer que (1) et (2) restent valables lorsque f est fixé quelconque dans H.

Désormais on prend pour H l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^2$, nulles hors du disque unité D, avec $(f|g) = \iint_D f(x)\, g(x)\, dx$. Soient $u_1, \dots, u_k$ k vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$, $v_j = R_{\frac{\pi}{2}} u_j$, et

$$(A_j g)(p) = \int_{\mathbb{R}} g(pu_j + tv_j)\, dt, \quad 1 \leq j \leq k,$$

pour $g \in H$, $p \in \mathbb{R}$. On prend pour N_j le noyau de l'opérateur A_j.

18° Montrer que $A_j : H \longrightarrow L^1(\mathbb{R})$ est continu, et que N_j est un sous-espace fermé de H.

19° Vérifier que, pour $g \in H$, $x \in \mathbb{R}^2$,

$$(P_j g)(x) = g(x) + \varphi(x) \frac{(A_j(f-g))(u_j \cdot x)}{(A_j \varphi)(u_j \cdot x)},$$

où φ est la fonction caractéristique de D.

20° Déduire de ce qui précède (avec $g = 0$ par exemple) une méthode de reconstruction approchée modulo N_0 d'une fonction $f \in H$ à partir des fonctions $A_1 f, \dots, A_k f$.

21° Montrer que N_0 n'est pas réduit à $\{0\}$: pour $k = 1$ d'abord, on cherchera $f \in N_0$ comme dérivée convenable d'une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, à support dans D.

